4. Construire C_f et sa tangente T au point I.

5. a. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

On notera f^{-1} la fonction réciproque de f et $C_{f^{-1}}$ sa représentation graphique.

b. Tracer C_f et $C_{f^{-1}}$ dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

12 Soit g la fonction définie sur $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$ par $g(x)=\tan(\pi x)$.

1. Etudier g et tracer sa courbe C_g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2. Montrer que g réalise une bijection de I sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]-\infty,0[$.

4. Soit G la fonction définie sur $]-\infty,0[$ par $G(x)=g^{-1}(x)+g^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$.

a. Montrer que G est dérivable sur $]-\infty,0[$ et déterminer $G'(x)$.

b. En déduire que pour tout x de $]-\infty,0[$, $g^{-1}(x)=-\frac{1}{2}-g^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$.

13 Soit h la fonction définie sur $]0,\pi]$ par $h(x)=\operatorname{cotan}\left(\frac{x}{2}\right)$.

1. Montrer que h réalise une bijection de $]0,\pi]$ sur $\mathbb{R}_+$.

On note φ sa fonction réciproque.

2. a. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $\varphi'(x)=\frac{-2}{1+x^2}$.

b. On désigne par Ψ, la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $\psi(x)=\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$.

Calculer la dérivée de la fonction Ψ sur $]0,+\infty[$.

c. Calculer $\varphi(1)$ et en déduire que pour tout $x>0$, $\varphi(x)+\psi(x)=\pi$.

14 A/ Soit la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

2. On désigne par g la restriction de f à $[0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$.

a. Montrer que g réalise une bijection de $[0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$ sur I que l'on déterminera.

On notera g^{-1} la fonction réciproque de g.

b. Donner les propriété de g^{-1} et déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de I.

3. Soit la suite (u_n) définie par $u_0=\frac{1}{2}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Montrer que pour tout entier naturel n, $0\le u_n\le\frac{1}{2}$.

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

15 Pour tout entier naturel $n\ge 2$, on considère la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par $f_n(x)=x^n+x^{n-1}+...+x-1$.

1. Montrer que f_n réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[-1,n-1]$.

2. a. En déduire que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution α_n dans $]0,1[$.

b. Montrer que pour tout $n\ge 1$, $(\alpha_n)^{n+1}=2\alpha_n-1$.

3. a. Montrer que la suite (α_n) est décroissante.

b. En déduire que la suite (α_n) est convergente et calculer sa limite.

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn